交換規則による富の分布の変化

齋藤　修
（〒154 東京都世田谷区梅丘２－２－２）

（1994年6月20日受理）

（要旨）Ｎ人から成る社会において各個人間で富が交換される場合の、この社会の富の分布の変化を調べた。最も自由な交換規則の場合には、初期分布の如何にかかわらず、富の分布はランダム分布（指数関数分布）に収束し、エントロピーは一般に増大する。任意の二人の個人が両者の富の平均値に等しい富を得るような交換規則の場合には、初期分布の如何にかかわらず、富の分布は一様分布に収束し、エントロピーは一般に減少する。また、自由な交換規則を修正したような交換規則の場合には、富の分布はランダム分布と一様分布の中間の分布に収束し、エントロピーは自由な交換規則の場合のエントロピーよりも常に小さい。

§１　はじめに

富の分布は経済学の問題であるが、富が個人や企業などの間を動き回る様子は、エネルギーが原子や分子の間を動き回る様子に似た点もあるので、この問題をここで論ずるのは何かの役に立つかも知れない。また、このような問題を物理学という限られた視野からばかり眺めるのでなく、全く別の視角から見る事は、新しい眺望を与える可能性があるかも知れない。

実際の社会の中で富が移動する様子は複雑であるので、次のようにモデル化しよう。Ｎ人の人がおり、それぞれいくらかの富をもっている。この富は個人から個人へと移動するが、それは二人の個人の間で富が交換されるためとする。また、この交換においては富の総量は保存するものとする。ただし、富の交換の仕方にはいろいろな規則が可能である。このようなモデル社会における富の分布の変化について考えてみよう。

この場合に富の分布を支配するのは個人間における富の交換規則である。そこで、富ｘをもつ個人Ａと富ｙをもつ個人Ｂの間で富が交換されるとき、Ａが富ｚをもちＢが富（ｘ＋ｙ－ｚ）をもつ確率をｗ（ｘ，ｙ；ｚ，ｘ＋ｙ－ｚ）で表し、交換確率と呼ぶことにする。交換確率には次の性質が成り立つ。

（１）　ｘ＜０，ｙ＜０，ｚ＜０，またはｚ＞ｘ＋ｙのとき

$$w(x, y; z, x+y-z)=0$$

（2）対称性

$$w(x, y; z, x+y-z)=w(x, y; x+y-z, z)$$

（3）
$$\int_0^\infty w(x, y; z, x+y-z)\,dz=1$$

（4）
$$\int_0^\infty z\,w(x, y; z, x+y-z)\,dz=(x+y)/2$$

さらに、交換確率を次のように分類する。

（Ⅰ）富xをもつAと富yをもつBの間の交換において、Aが0と（x＋y）の間の富を得る確率が一定である場合を自由交換と呼ぶことにする。これは特定の量の富が得にくいと言うような束縛がない場合である。このときには、次式が成り立つ。

$$w(x, y; z, x+y-z)=1/(x+y)$$

（Ⅱ）AとBが両者の富の平均値を得るように交換が行われる場合を平均交換と呼ぶことにする。このときは次のように表される。

$$w(x, y; z, x+y-z)=\delta(z-[x+y]/2)$$

ただし、δはデルタ関数である。

（Ⅲ）自由交換の規則を修正した場合を修正自由交換と呼ぶことにする。一例として、次の場合が考えられる。

$$w(x, y; z, x+y-z)=1/(x+y)-b\{(x+y)^2-6(x+y)z+6z^2\}/(x+y)^3$$

ただし、bは修正パラメータであり、b＝0のときは自由交換となる。

§2　富の分布の変化に対する基礎方程式

N人の社会で任意の時刻tにおいて、xとx＋dxの間の富を持つ個人の数をNで割ったものをm（x，t）dxで表し、m（x，t）を富の分布関数と呼ぶ。すると

$$\partial m(x, t)/\partial t=-\lambda m(x, t)\int_0^\infty m(y, t)\,dy+\lambda\int_0^\infty m(y, t)\,dy\int_V m(z, t)\,w(y, z; x, y+z-x)\,dz$$

が成り立つ。ただし、λは1人の個人が単位時間当りに他の個人と富の交換を行う確率を表し、Vは次の性質をもつ。

$$V=\begin{cases} x-y & x \geqq y \\ 0 & x<y \end{cases}$$

上式の右辺第1項は$m(x, t)$の減少速度を表し、第2項は増加速度を表す。

ここで、分布関数のモーメント

$$f(n;t)=\int_0^\infty x^n m(x, t)\,dx$$

を定義する。また、基礎方程式の両辺をxについて0から∞まで積分することによって、次の式が得られる。

$$df(0;t)/dt=0$$

これは$f(0;t)$が定数であることを意味するが、定義から

$$f(0;t)=1$$

が得られるから、これは正しい結論である。次に、基礎方程式の両辺にxを掛けて、xについて0から∞まで積分すると

$$df(1;t)/dt=0$$

が得られる。これもまた、$f(1;t)$が定数であることを意味する。ところで、この社会の富の総量をEとし、個人の富の平均値をx_0とすると$x_0=E/N$となるが、これはまた、定義に従って

$$f(1;t)=x_0$$

ともなる。従って、$f(1;t)$が定数であるという結論は正しいものであった。基礎方程式からこのような正しい結論が二つも得られたと言う事は、もとの基礎方程式が正しいものであった事の間接的な証拠と考えられる。

§3　自由交換の場合

自由交換の場合には、基礎方程式の両辺にx^nを掛けて、xについて0から∞まで積分すると、モーメントに対する漸化式が次のように得られる。

$$df(n;\tau)/d\tau=-f(n;\tau)f(0;\tau)+\sum_{j=0}^{n}{}_nC_j f(j;\tau)f(n-j;\tau)/(n+1)$$

ただし、$d\tau=\lambda dt$とした。ここで、$n=0$および$n=1$とすると

$$f(0;\tau)=1 \quad \text{および} \quad f(1;\tau)=x_0$$

が得られる。これは、すでに得られた結果と一致する。さらに、モーメントの漸化式において、$n=2$および$n=3$とした式を解くと

$$f(2;\tau)=x_0^2\{2+(\alpha-2)\exp(-\tau/3)\}$$

および

$$f(3;\tau)=x_0^3\{6+9(\alpha-2)\exp(-\tau/3)+[\beta-6-9(\alpha-2)]\exp(-\tau/2)\}$$

が得られる。ただし

$$f(2;0)=\alpha x_0^2 \text{ および } f(3;0)=\beta x_0^3$$

と置いた。これらの式から明かなように、$\tau\to\infty$のとき

$$f(2;\tau)\to x_0^2 2! \quad \text{および} \quad f(3;\tau)\to x_0^3 3!$$

となることがわかる。さらに、数学的帰納法を用いると

$$f(n;\tau)\to x_0^n n!$$

が証明される。これから

$$m(x,\tau)\to\exp(-x/x_0)/x_0$$

が導かれる。これは、最確分布またはランダム分布と呼ばれる分布であり、物理学における Maxwell分布もこの中に含まれる。従って、次の事がわかった。

自由交換の場合には、富の初期分布の如何に係わらず、富の分布はランダム分布に収束する。

§4　平均交換の場合

平均交換の場合のモーメントの漸化式は次のようになる。

$$df(n;\tau)/d\tau=-f(n;\tau)f(0;\tau)+2^{-n}\sum_{j=0}^{n}{}_nC_j f(j;\tau)f(n-j;\tau)$$

このときにも

$$f(0;\tau)=1, \quad \text{および} \quad f(1;\tau)=x_0$$

が成り立つ。また、$\tau\to\infty$のとき

$$f(n;s)\to x_0^n$$

となることが漸化式から導かれる。これから

$$m(x,s)\to\delta(x/x_0-1)/x_0$$

が得られるが、これは一様分布と呼ばれる分布へ収束することを示す。従って、次の事がわかった。

平均交換の場合には、初期分布の如何にかかわらず、富の分布は一様分布へ収束する。

§5　修正自由交換の場合

自由交換をすでに述べたように修正した場合には、モーメントの漸化式は次のようになる。

$$df(n;\tau)/d\tau=-f(n;\tau)f(0;\tau)+K\sum_{j=0}^{n}{}_nC_j f(j;\tau)f(n-j;\tau)$$

ただし

$$K=\frac{(n+2)(n+3)-n(n-1)b}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

これから明かなように、モーメント$f(n;\tau)$はτが増大するにつれてある収束値へ収束する。そのときの分布関数はポアソン分布

$$m(x)=C(x/x_0)^{\sigma-1}\exp(-\sigma x/x_0),\ C=\sigma^{\sigma}/x_0\Gamma(\sigma)$$

に近く、bとσの間には次の関係が成り立つ。

$$(10-b)/(5+b)=1+1/\sigma$$

§6　エントロピー

一つの系があるとき、その内部変数が取り得る場合の総数をWとするならば、その系のエントロピーSは次の式で定義される。

$$S=k\log(W)$$

ただし、kはBoltzmann定数である。これは物理学におけるエントロピーの定義であるが、同じような定義が情報科学においても行われているので、ここでもこの定義を使うことにする。ただし、$k=1$とする方が簡単であるが、kは残しておくことにする。ところで、このエントロピーは次のように書き直すことが出来る。

N人から成る系において、任意の個人が状態A_1にある確率をp_1，状態A_2にある確率をp_2，状態A_3にある確率をp_3，・・・とするならば、エントロピーSは次の式で与えられる事が証明される。(証明略)

$$S=-kN\sum_j p_j\ln(p_j)$$

我々が今考えている系では、個人がxと$x+dx$の間の富を持つ確率は$m(x,t)dx$であるから、エントロピーは

$$S=-kN\int_0^{\infty}m(x,t)\ln\{m(x,t)\Delta\}dx$$

となる。この式の中のΔは富の次元をもつ定数であり、エントロピーの基準点を与えるものであるが、次の条件を満足しなければならない。

$$\Delta\leqq1/\max\{m(x,t)\}$$

［場合１］自由交換の場合には、初期分布の如何に係わらず、富の分布はランダム分布へ収束することがすでに導かれた。このランダム分布に対しては、エントロピーは次のようになる。

$$S = kN\{1 + \ln(x_0/\Delta)\}$$

このエントロピーが最大値である事は、次のように証明される。

「定理１」自由交換の場合には、エントロピーが最大になるための必要十分条件は、富の分布がランダム分布となることである。

（証明）この社会の富の総量をＥとすると、ｍ（ｘ）は次の式を満足しなければならない。

$$\int_0^\infty m(x)\,dx = 1 \quad \text{および} \quad \int_0^\infty x m(x)\,dx = E$$

自由交換の場合には、この他の束縛条件はない。従って、この２式が成り立つという条件の下にＳを最大にすればよい。これはαとβを定数として、無条件に

$$I = \int_0^\infty \{m(x)\ln[m(x)\Delta] + \alpha m(x) + \beta x m(x)\}\,dx$$

を最小にする問題である。これより、Ｉを最小にするための必要十分条件は

$$m(x) = C\exp(-\beta x) \qquad \text{ただし} \qquad C = \exp(-1-\alpha)/\Delta$$

であることが証明される。これはランダム分布であるから、結局エントロピーが最大になるときの必要十分条件は、富の分布がランダム分布である事になる。以上により、次の事がわかった。

<u>個人間の富の交換によって富の分布は一般に変化するが、自由交換の場合には、その変化はエントロピーが最大になる方向へ向かう。そして、最終的には、富の分布はランダム分布へ収束し、エントロピーはその時最大となる</u>。

［場合２］平均交換の場合には、初期分布の如何に係わらず、富の分布は一様分布へ収束することがすでに導かれた。この一様分布に対しては、エントロピーは次のようになる。

$$S = kN\ln(x_0)$$

ところで、これは最も小さいエントロピーの値であり、多くの他の分布に対するエントロピーはこれより大きな値をもつ。

［場合３］すでに述べた修正自由交換の場合に、富の分布関数を

$$m(x, \tau) = m_0(x, \tau) + b m_1(x, \tau) \cdots$$

とすると、エントロピーは

$$S(\tau)=kN\{1+\ln(x_0/\Delta)-b^2\int_0^\infty(m_1/m_0)^2dx\}+O(b^3)$$

となる。これより、b≠0の場合には、bの正負にかかわらず、b^2が増大するにつれて、エントロピーが減少する事がわかる。従って、修正自由交換の場合のエントロピーは自由交換の場合のエントロピーよりも常に小さいことになる。

§7　結論

N人から成る社会において、各個人の間で富が交換されるときの富の分布の変化を表す基礎方程式が与えられた。そして、それを解くことにより次の事がわかった。

（1）最も束縛の少ない自由交換の場合には、初期分布の如何に係わらず、富の分布はランダム分布へ収束することによって平衡状態に達する。また、それに伴ってエントロピーは一般に増大し、平衡状態において最大となる。

（2）二人の個人が両者の富の平均値を分け合うような交換が行われる平均交換の場合には、初期分布の如何に係わらず、富の分布は一様分布へ収束することによって平衡状態に達する。そして、エントロピーは一般に減少する。

（3）自由交換を修正して得られる一つの修正自由交換の場合には、初期分布の如何に係わらず、富の分布は交換規則の修正の程度によって決まる特定の分布へと収束し、平衡状態に達する。また、エントロピーは修正の仕方の如何に係わらず、自由交換の場合のエントロピーよりも小さい。

（4）孤立した社会において、個人間で富が交換される場合に、社会の内部状態を表す量の一つのエントロピーは、交換確率の与え方によって、増大する場合もあるし減少する場合もある。従って、社会の統計的性質を解明する目的のためには、エントロピーと並んで交換確率を用いると便利である。

以上のように、N人から成る社会では、個人間における富の交換によって富の分布が変化する事が明かになったが、その際富の交換規則が重要な影響を与えることがわかった。ただし、ここで述べたモデル社会は非常に単純化されたものである。しかし、それが単純化されたものであるが故に、原因と結果の相関が極めて明瞭に理解されるという利点がある。この結果を基礎として、もっと現実的な社会に近いモデルの研究が期待される。また、この論文のテーマは経済学の問題であるが、それは統計物理学の基礎とも関連があり、その分野にも新しい風を吹き込む契機となるかも知れない。